УДК 502.33: 631.6

А.Р. Хафизов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЛАГОПЕРЕНОСА В КАТЕНАХ ВОДОСБОРОВ

Ключевые слова: водосбор; влагоперенос; катена; напор; влагопроводность; фильтрация; дифференциальное уравнение; гигроскопичность; метод конечных разностей

Введение. В современных науках для изучения таких сложных процессов как влагоперенос в катенах водосборов широко используются математические модели, опирающихся на геосистемный ландшафтный подход (А. И. Голованов, Ю. Г. Пузаченко, В. В. Сысуев и др.). В его рамках важно описать структуру катены, которая определяет виды, направленность и интенсивность природных процессов. Один из наиболее общих подходов к описанию структуры – представление о водосборе как объекте, который формируется и развивается под действием совокупности геофизических полей – поля силы тяжести, инсоляции (освещенности), поля температур воздуха, почвы, поверхностных вод, давлений воды в разных природных телах, поля влажности почвы и пр. При этом движение влаги в катенах водосборов представляется результатом совместного взаимодействия этих факторов.

Цель и задачи исследований. Целью исследований является получение математического выражения влагопереноса на основе разработки теоретических основ движения влаги в катенах водосборов.

Задачи исследования заключались в выводе дифференциальное уравнение двумерного передвижения влаги в катенах водосборов и его реализации в виде конечно-разностного аналога.

Методы исследований. Использованы математические модели, являющиеся наиболее оптимальными для описания природных процессов, происходящих в таких сложно организованных системах, как водосборы.

Результаты исследований. Вода в почве движется за счет двух факторов: градиента сил, выводящих ее из равновесия и проводимости почвы (влагопроводность). Многочисленные опыты показали, что движение влаги в почвы может быть описано законом Дарси, по которому скорость движения (фильтрации) $q_ф$ линейно зависит от градиента действующих сил:

$$q_ф = -k_ф \cdot \frac{dH}{dx}, \quad (1)$$

где $k_ф$ - коэффициент фильтрации; H– напор фильтрационного потока.

Градиент сил возникает за счет разности потенциалов почвенной влаги в смежных точках. Общий потенциал почвенной влаги состоит из гравитационного, каркасного, капиллярного, осмотического, температурного и электрического потенциалов. В расчетах потенциал почвенной влаги заменен эквивалентным давлением или напором.

Передвижение влаги вызывает ее полный напор H, который в общем случае принимают состоящий из гравитационного и каркасно-капиллярного напоров:

$$H = -x + \psi, \quad (2)$$

где x - расстояние от рассматриваемой точки до поверхности грунта, характеризующее гравитационный напор; ψ – каркасно-капиллярный напор, зависящий от гранулометрического и агрегатного состава почвы, размеров и формы пор, насыщенности пор влагой. В зоне неполного насыщения $\psi < 0$, на поверхности грунтовых вод $\psi = 0$, под уровнем грунтовых вод каркасно-капиллярный напор заменяют гидростатическим напором.

Связь между влажностью и каркасно-капиллярным напором описывается по эмпирической зависимости [1]:

$$\left(\frac{\omega-\omega_m}{p-\omega_m}\right)=\exp\left[\left(\frac{|\psi|}{\mu\cdot h_k}\right)^n\right], \qquad (3)$$

где ω, ω_m, p - соответственно объемная влажность, максимальная гигроскопичность и пористость почвы; h_k - высота капиллярного поднятия; μ и n – безразмерные эмпирические коэффициенты.

Влагопроводность k_ω зависит от формы и размеров пор и степени заполнения водой. При полном влагонасыщении почвы коэффициент влагопроводности k_ω равен коэффициенту фильтрации $k_ф$. Для диапазона влажности от полного насыщения до максимальной гигроскопичности коэффициент влагопроводности определяется по зависимости А. И. Голованова [1]:

$$k_\omega=k_ф\cdot\left(\frac{\omega-\omega_m}{p-\omega_m}\right)^5. \qquad (4)$$

Для получения дифференциального уравнения двумерного передвижения почвенной влаги рассмотрим элементарный объем с размерами Δx, Δy и площадью сторон F (рисунок). Расположим начало координат на поверхности земли и направим ось x вниз, а ось y параллельно поверхности земли.

Предположим, что в рассматриваемом элементарном объеме почвы движение почвенной влаги неустановившиеся, вызванное увлажнением с поверхности. Составим баланс почвенной влаги в элементарном объеме за время Δt.

Поступление влаги в элементарный объем происходит по двум направлениям: по оси x -w_x и по оси y - w_y. За время Δt в нем накопятся запасы влаги равные:

$$w=w_x+w_y=\Delta\omega\cdot\Delta x\cdot F+\Delta\omega\cdot\Delta y\cdot F=\Delta\omega\cdot F\cdot(\Delta x+\Delta y). \qquad (5)$$

В соответствии с законом сохранения вещества это изменение должно равняться разности между притоком влаги в этот объем и расходом из него.

Объемы притока влаги через смежные сечения ($w_x^{пр}$ и $w_y^{пр}$) составят:

$$w_x^{пр}=v_x\cdot F\cdot\Delta t \text{ и } w_y^{пр}=v_y\cdot F\cdot\Delta t, \qquad (6)$$

где v_x и v_y - скорости движения влаги в смежных сечениях соответственно по оси x и y.

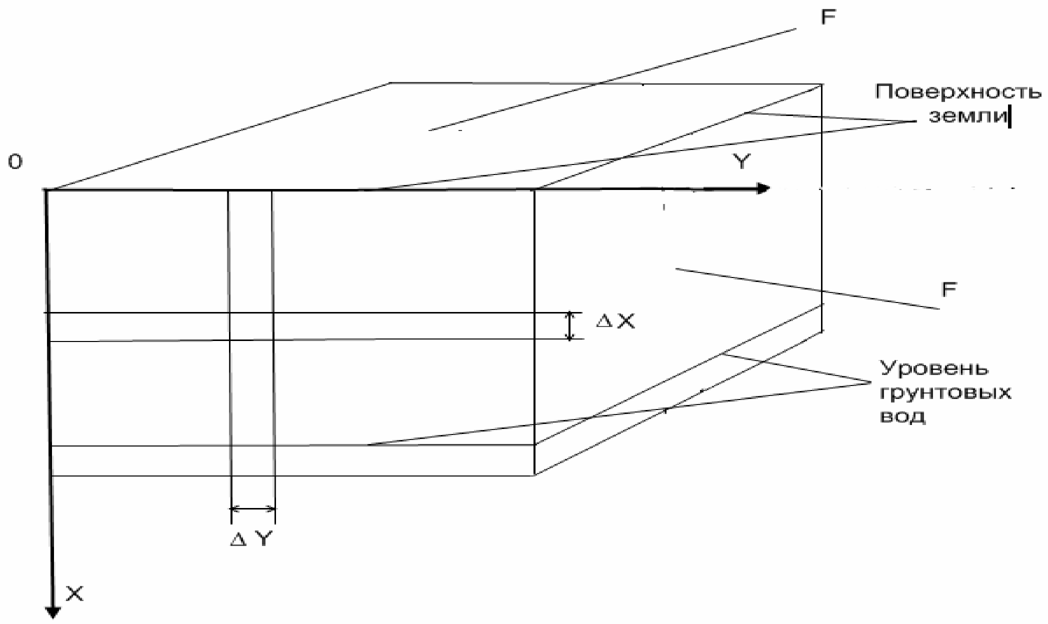

Рисунок Схема к выводу дифференциального уравнения влагопереноса в катенах водосборов

На выходе из элементарного объема скорости получат приращения равные Δv_x и Δv_y. Из этого объема возможен отбор влаги корнями растений. В уравнении баланса выразим его в виде единичной интенсивности отбора влаги из 1 м^3 почвы - e_k. В этом случае расход (отток и отбор) влаги из рассматриваемого объема будет равен:

- по оси x: $w_x^{om} = (v_x + \Delta v_x) \cdot F \cdot \Delta t + e_k \cdot \Delta x \cdot F \cdot \Delta t$; (7)
- по оси y: $w_y^{om} = (v_y + \Delta v_y) \cdot F \cdot \Delta t + e_k \cdot \Delta y \cdot F \cdot \Delta t$. (8)

Запишем уравнение баланса почвенной влаги:

$$\Delta\omega \cdot F \cdot (\Delta x + \Delta y) = v_x \cdot F \cdot \Delta t - (v_x + \Delta v_x) \cdot F \cdot \Delta t - e_k \cdot \Delta x \cdot F \cdot \Delta t + v_y \cdot F \cdot \Delta t - (v_y + \Delta v_y) \cdot F \cdot \Delta t - e_k \cdot \Delta y \cdot F \cdot \Delta t. \quad (9)$$

После некоторых преобразований и упрощений:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -\frac{\Delta v_x}{(\Delta x + \Delta y)} - \frac{\Delta v_y}{(\Delta x + \Delta y)} - e_k. \quad (10)$$

Исходя из постановки задачи для Δv_x :Δy=0 и для Δv_y :Δx=0, тогда:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -\frac{\Delta v_x}{\Delta x} - \frac{\Delta v_y}{\Delta y} - e_k. \quad (11)$$

Дифференциальное уравнение движения почвенной влаги получается, если устремить Δt, Δx, Δy к нулю:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial_x} - \frac{\partial v_y}{\partial_y} - e_k. \quad (12)$$

Преобразуем, используя закон Дарси (2):

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial_x} \cdot \left(k_\omega \cdot \frac{\partial H}{\partial_x}\right) + \frac{\partial}{\partial_y} \cdot \left(k_\omega \cdot \frac{\partial H}{\partial_y}\right) - e_k, \quad (13)$$

где k_ω – коэффициент влагопроводности, характеризующий сопротивление влаге при движении в пористом пространстве; H – напор почвенной влаги.

Соотношение $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ выразим в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = C_\omega \cdot \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (14)$$

где $C_\omega = \frac{\partial\omega}{\partial H}$ - коэффициент влагоемкости.

Тогда конечное дифференциальное уравнение двумерного передвижения влаги в катенах примет вид:

$$C_\omega \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial_x} \cdot \left(k_\omega \cdot \frac{\partial H}{\partial_x}\right) + \frac{\partial}{\partial_y} \cdot \left(k_\omega \cdot \frac{\partial H}{\partial_y}\right) - e_k. \quad (15)$$

Таким образом, полученные формулы (11, 13, 14 и 15) позволяют математически описать влагоперенос в ландшафтных катенах водосборов.

Дифференциальное уравнение передвижения влаги в катенах нелинейное и на практике решается методом конечных разностей. Поэтому вместо формулы (15) используется его конечно-разностный аналог по неявной схеме, исходя из баланса влаги в i, j блоке:

$$C_{\omega_{i,j}}^{n+1} \cdot \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{H_{i,j-1}^{n+1} - H_{i,j}^n}{h_j \cdot R_{i,j-1}^6} - \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j+1}^n}{h_j \cdot R_{i,j}^6} + \frac{H_{i-1,j}^{n+1} - H_{i,j}^n}{b_i \cdot R_{i-1,j}^2} - \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i+1,j}^n}{b_i \cdot R_{i,j}^2} - e_{i.j}^n, \quad (16)$$

где $H_{i,j}^{n+1}$ - напор на расчетный момент времени $n+1$, определяемый по конечно-разностному аналогу формулы (2):

$$H_{i,j}^{n+1} = -x_{i,j} + \psi_{i,j}^{n+1}. \quad (17)$$

$C_{\omega_{i,j}}^{n+1}$ – коэффициент влагоемкости, по формуле (14), в конечно-разностной форме будет:

$$C_{\omega_{i,j}}^{n+1} = \frac{(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)}{(H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^n)} = \frac{(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)}{(\psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n)}. \quad (18)$$

Связь между влажностью почвы $\omega_{i,j}^{n+1}$ и каркасно-капиллярным потенциалом $\psi_{i,j}^{n+1}$ определяется по формуле (3); Δt- расчетный шаг по времени; $R_{i,j}^6$ - вертикальное сопротивление потоку влаги между центрами i, j и i, j +1 блоков:

$$R_{i,j}^6 = 0{,}5 \cdot \left(\frac{h_j}{k_{\omega_{i,j}}} + \frac{h_{j+1}}{k_{\omega_{i,j+1}}}\right). \quad (19)$$

$R_{i,j}^2$ - горизонтальное сопротивление потоку влаги между центрами i, j и $i+1, j$ блоков:

$$R_{i,j}^2 = 0{,}5 \cdot \left(\frac{b_j}{k_{\omega_{i,j}}} + \frac{b_{j+1}}{k_{\omega_{i+1,j}}}\right); \quad (20)$$

$k_{\omega_{i,j}}$ - коэффициент влагопроводности (4).

Вывод. Полученное дифференциальное уравнение двумерного передвижения влаги в катенах математически описывает влагоперенос в катенах водосборов. Решение дифференциального уравнения методом конечных разностей позволяет подсчитать потоки влаги в любых сечениях катен водосборов.

Библиографический список

1. Голованов А. И., Сухарев Ю. И. Математическая модель влагопереноса в ландшафтных катенах / Материалы междунар. науч.-практ. конф. М.: МГУП, 2005. С. 3-11

Сведения об авторе

Хафизов Айрат Райсович, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, Башкирский государственный аграрный университет, тел.: (347) 228-08-71, e-mail: Chafizov@mail.ru

В статье приводится вывод математического выражения дифференциального уравнения двумерного движения влаги в катенах водосборов. Полученное дифференциальное уравнение двумерного передвижения влаги в катенах математически описывает влагоперенос в катенах водосборов. Решение дифференциального уравнения методом конечных разностей позволяет подсчитать потоки влаги в любых сечениях катен водосборов. В расчетах учитываются общий потенциал почвенной влаги, гравитационные и каркасно-капиллярные напоры, влажность и влагопроводность почвы.

A. Khafizov

THEORETICAL BASES AND MATHEMATICAL DESCRIPTION MOISTURE CARRYING OVER IN KATENS RESERVOIRS

Key words: the moisture carrying over; katens; a pressure; a moisture to spend; a filtration; the differential equation; hygroscopicity; a method of final differences

Authors' personal details

Khafizov Airat, Candidate of Technical Sciences, assistant professor, senior researcher, Bashkir State Agrarian University, phone: (347) 228-08-71, e-mail: Chafizov@mail.ru

The moisture carrying over, katens, a pressure, a moisture to spend, a filtration, the differential equation, hygroscopicity, a method of final differences.

Article the conclusion of mathematical expression dif-ferentsialnogo the equations of two-dimensional movement of a moisture in katens reservoirs is resulted. The received differential equation of two-dimensional movement of a moisture in katens the mathematical describes vlagope-renos in katens reservoirs. The decision of the differential equation a method of final differences allows to count up moisture streams in any sections katens reservoirs. In calculations the general potential of a soil moisture, gravitational and karkasno-capillary pressures, humidity and to spend a moisture soils are considered.